ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 1994

MATHEMATIQUES 2EME EPREUVE

OPTIONS : GENERALE, ECONOMIQUE, TECHNOLOGIQUE

SAMEDI 28 MAI 1994 DE 11 H A 13 H

Sont autorisées : - Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

EXERCICE n° 1

On rappelle que M_2 (R) désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A toute matrice $X \in M_2$ (R), on associe la matrice Y définie par :

$$Y = f(X) = AX + XA$$

1° Montrer que f est un endomorphisme de M_2 (R).

2° Déterminer le noyau de f, c'est-à-dire l'ensemble des matrices :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ vérifiant } f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

3° a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de M_2 (R).

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d, pour que M soit un élément de l'image de f, c'est-à-dire pour qu'il existe $X \in M_2$ (R) vérifiant :

$$f(X) = M .$$

b) Déterminer les antécédents par f de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE n° 2

On considère la fonction f, définie pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - x}$$

$f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de f ; par convention $f^{(o)} = f$.

1° a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1 - x)^{n+1}} \qquad (x \neq 1),$$

où P_n est un polynôme de degré n dont on précisera le terme de plus haut degré.

Exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $P_n'(x)$.

b) Calculer $P_n(1)$, pour n entier naturel.

c) Donner les expressions de P_0, P_1 et P_2 .

2° a) Montrer que pour tout réel x différent de 1, on a :

$$(x - 1)f'(x) - (x - 2)f(x) = 0$$

b) En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on a :

$$P_{n+1}(x) = (n + 2 - x)P_n(x) + n(x - 1)P_{n-1}(x)$$

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$P_n' = - nP_{n-1}$$

3° a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k} .

En déduire que : $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k n!$

b) Appliquer la formule de Taylor à P_n entre 1 et x.

En déduire : $\lim_{n \to +\infty} \frac{P_n(x)}{n!} = e^{1 - x}$

EXERCICE N° 3

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'apparition de pile (P) est p , celle de face (F) étant q avec $p + q = 1$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X le rang où apparaît pour la première fois deux résultats "pile" consécutifs. Ainsi, dans la série suivante de 10 lancers :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
F	F	F	P	F	P	F	P	P	F ...

se trouve réalisé l'événement $(X = 9)$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $a_n = P(X = n)$.

1° Calculer en fonction de p et q : a_1, a_2, a_3 et a_4.

2° Montrer, en distinguant suivant le résultat du premier lancer, que, pour $n \geq 3$, on a :

$$a_n = qa_{n-1} + pqa_{n-2}$$

3° On suppose à présent : $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.

a) Etablir que, pour $n \geq 1$, a_n a pour expression :

$$\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

b) Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.